

定理 1 设 $B = AA^T A$, 则 b_{ij} 表示 x_i 与 y_j 节点间的正局部社团连接与负局部社团连接数量的差值, 即 $b_{ij} = BCI_{ij}$ 。

证明: 不妨将整个双模符号网络视为一个拥有 $n + m$ 个节点的单模网络 $\mathcal{G}_0(N, W)$, 其邻接矩阵 $W = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \in \{0, 1, -1\}^{(n+m) \times (n+m)}$ 。

设矩阵 U_k 的元素 $[U_k]_{ij}$ 表示 $\mathcal{G}_0$ 中 i 与 j 两个节点间平衡 k 元路径的数量, V_k 的元素 $[V_k]_{ij}$ 表示 $\mathcal{G}_0$ 中 i 与 j 两个节点间的不平衡 k 元路径的数量。下面证明: $W^k = U_k - V_k$

首先, 当 $k = 1$ 时, $U_1 - V_1 = W^+ - W^- = W$, 其中 $W^+ \in \{0, 1\}^{(n+m) \times (n+m)}$ 表示网络中的所有正边, $W^- \in \{0, 1\}^{(n+m) \times (n+m)}$ 表示网络中的所有负边。

假设 $W^k = U_k - V_k$ 在 $k = l$ 时成立, 则有:

$$U_{l+1} - V_{l+1} = (U_l W^+ + V_l W^-) - (U_l W^- + V_l W^+) = (U_l - V_l)(W^+ - W^-) = W^l W = W^{l+1}$$

故根据数学归纳法, 可证明 $W^k = U_k - V_k$ 。

当 k 为奇数时, 易知 $U_3 = \begin{bmatrix} 0 & P \\ P^T & 0 \end{bmatrix}$, $V_3 = \begin{bmatrix} 0 & Q \\ Q^T & 0 \end{bmatrix}$, 其中 $P \in \mathbb{R}^{n \times m}$, 其元素表示 x_i 与 y_j 节点间的平衡三元路径的数量, $Q \in \mathbb{R}^{n \times m}$, 其元素表示 x_i 与 y_j 节点间的非平衡三元路径的数量。而 $W^3 = \begin{bmatrix} 0 & AA^T A \\ A^T AA^T & 0 \end{bmatrix}$, 故有 $AA^T A = P - Q$ 。

根据 BCI 的定义可知, $BCI_{ij} = [P - Q]_{ij} = [AA^T A]_{ij}$, 定理得证。